***Линейная часть аффинного преобразования.***

Пусть  ‑ аффинное пространство над векторным пространством , и  ‑ аффинное преобразование.

**Определение 1.** Отображение , определяемое равенством

**,**

где  ‑ некоторая точка из , называется линейной частью аффинного преобразования .

Пусть  ‑ репер в  и координатное выражение аффинного преобразования  в репере  имеет вид

.

Напомним, что здесь  ‑ невырожденная матрица, а  ‑ столбец координат некоторого вектора  в базисе .

Подсчитаем координаты вектора, стоящего в правой части равенства :



Как видим, правая часть равенства не зависит от выбора точки , и, следовательно, формула корректно определяет отображение . К тому же мы получили координатное выражение этого отображения в базисе :

.

Матрица  в называется матрицей отображения  (или отображения , если речь идет о координатном выражении аффинного преобразования), и строится она так: -тый столбец матрицы  есть координатный столбец образа -того базисного вектора (***доказать***!).

Заметим также, что столбец  в совпадает с координатным столбцом образа начала координат (образом точки  репера ) при аффинном отображении .

**Упражнение 1.** Доказать свойства линейной части аффинного преобразования:

1.  (линейность),
2. .

**Упражнение 2.** Привести пример отображения , для которого формула некорректна, то есть не задает отображение .

***Уравнение образа (прообраза) фигуры при аффинном преобразовании.***

**Теорема 1.** Пусть  аффинное преобразование, а фигура  в некотором репере  задается уравнением  (здесь  ‑ координатный столбец). Тогда уравнение образа  (соответственно прообраза ) этой фигуры при отображении  будет иметь вид  (соответственно ).

**Доказательство.**

Пусть  ‑ произвольная точка аффинного пространства с координатным столбцом  в репере . Тогда

.

(Второе утверждение доказывается аналогично.)

Заметим, что формулу  можно понимать как *координатное выражение аффинного отображения*, а можно понимать и как *зависимость между координатами точек в различных базисах*. В нижеприведенной таблице описано как изменяется уравнение фигуры при этих процессах.

|  |  |
| --- | --- |
| Пусть  имеет координатное выражение . Тогда координатное выражение  будет иметь вид  , где , .  Если фигура  в заданном репере  задается уравнением , то ее образ  будет иметь уравнение | Пусть  и  ‑ координатные столбцы точки в новом и старом реперах соответственно, связанные зависимостью . Эту зависимость можно переписать в виде («старые координаты выражаются через новые»)  ,  где , .  Если фигура  в старом репере задается уравнением , то эта же фигура в новом репере будет иметь уравнение |

В таблице можно увидеть проявление (и обоснование) замечательного факта:

*Свойство фигуры, сформулированное при помощи координат, не зависит от выбора координат (то есть действительно является свойством фигуры и не зависит от исследователя)* ***тогда и только тогда, когда*** *оно (свойство) сохраняется при аффинных преобразованиях!*

*Свойства фигуры, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях, называют аффинными свойствами фигуры.*

***Аффинные свойства фигур и составляют содержание геометрии аффинного пространства.***

*Приятно общаться со студентами, которые, думая по аналогии, сделают вывод: линейные свойства векторных пространств (то есть свойства, сохраняющиеся при действии линейных преобразований = невырожденных линейных операторов) составляют содержание* ***геометрии*** *векторных пространств.*

*Ясно, что фигура*  *и ее аффинный образ*  *имеют одинаковые аффинные свойства. Образно говоря, если бы мы жили в аффинном мире, то глядя на фигуры*  *и , мы не смогли бы понять, где какая фигура – у них одинаковые свойства. То есть отсутствуют свойства, которые сохраняются при аффинных преобразованиях (это и есть аффинные свойства), и которые у этих фигур различны.*

И еще одно наблюдение.

Если фигура  в некотором репере  задается уравнением , где  ‑ полином степени *k*, то и в уравнение  ее образа при аффинном преобразовании  ‑ также полином степени *k.*

**Упражнение 3.** Пусть  и  два репера в аффинном пространстве . Существует единственное аффинное преобразование , переводящее первый репер во второй:

.

Равенство означает: .

***Отношение эквивалентности***

Говорят, что на непустом множестве  задано *отношение *, если выбрано подмножество (обозначим его тем же символом) . При этом, если , то говорят, что элемент  находится в отношении  с элементом  и пишут .

Если

*  имеем , то отношение  называется рефлексивным,
* , то отношение  называется симметричным,
* , то отношение  называется транзитивным.

Отношение  называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если на  задано отношение эквивалентности , то любые два элемента этого множества либо эквивалентны, либо не эквивалентны. Подмножества множества , состоящие из всех эквивалентных между собой элементов, называются классами эквивалентности. Различные классы эквивалентности определяют *разбиение* множества : они не пусты, не пересекаются, и их объединение совпадает с . Это, в частности, можно трактовать так: выбрав отношение эквивалентности, мы определяем соответствующую классификацию элементов в .

Верно и обратное: если на  задано разбиение, то естественным образом строится отношение эквивалентности

,

для которого классы эквивалентности будут совпадать с элементами разбиения.

Примерами отношений эквивалентности могут быть отношения подобия и равенства треугольников на евклидовой плоскости. В первом случае эквивалентные треугольники называют подобными, во втором – равными.

Приведем еще один важный пример. Пусть . Отношение  ‑ отношение эквивалентности.